

Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

4) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные опiski в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

5) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

6) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

7) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставяемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а

жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено.

8) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

9) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий, т.е. к д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину (адрес эл. почты **valerii.shevaldin@imm.uran.ru**) и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. +**79220350324**). Мы ответим на все Ваши вопросы.

**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады
школьников по математике
в 2015 – 2016 учебном году
7 класс**

Время выполнения заданий — 4 часа

7.1. Бьётся Иван Царевич со Змеем Горынычем, трёхглавым и трёххвостым. Одним ударом он может срубить либо одну голову, либо один хвост, либо две головы, либо два хвоста. Но, если срубить ровно один хвост, то немедленно вырастет два новых; если срубить два хвоста — вырастает голова; если срубить ровно одну голову, то вырастает новая голова, и только если срубить две головы, то не вырастает ничего. Змей погибает только тогда, когда у него не останется ни голов, ни хвостов. Может ли Иван Царевич убить Змея? Ответ обосновать.

Решение: Иван Царевич может поступить, например, так: первыми тремя ударами срубить по хвосту (при этом вырастет 6 новых хвостов и Змей станет с тремя головами и шестью хвостами), затем тремя ударами срубить по 2 хвоста (теперь хвостов больше нет, но есть 6 голов), и, наконец, ещё тремя ударами срубить по 2 головы. Змей убит.

Примечание: Несложно доказать (хотя этого в задаче и не требуется), что приведённый пример оптимален по количеству ударов: быстрее, чем за 9 ударов, Змея не уничтожить.

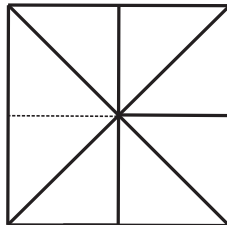
Ответ: Сможет.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Приведена последовательность ударов, убивающая Змея (не обязательно состоящая из 9 ударов)	7 баллов
Показано только как срубить все головы (хвосты остались) или только как срубить все хвосты (головы остались)	2 балла
Замечено, что если у Змея все хвосты срублены, то новые хвосты уже никогда не вырастут	1 балл
Только ответ (без примера)	0 баллов

7.2. Как разрезать квадрат на 7 треугольников, среди которых 6 одинаковых?

Решение: Например, так, как показано на рисунке.



К решению задачи 7.2

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный пример разрезания	7 баллов
Пример разрезания на другое количество треугольников таких, что все треугольники, кроме одного, равны	2 балла
Пример разрезания на 7 треугольников, среди которых нет шести равных	1 балл
Все другие примеры разрезов и рассуждения, не приведшие к решению	0 баллов

7.3. На доске записано выражение

$$10 : 9 : 8 : 7 : 6 : 5 : 4 : 3 : 2 : 1.$$

Барон Мюнхгаузен утверждает, что может поставить в нём одну или несколько пар круглых скобок так, что значением выражения будет натуральное число, большее 44 500. Не заблуждается ли барон? Ответ обосновать.

Решение: Если Мюнхгаузен расставит скобки следующим образом:

$$10 : (9 : 8 : 7 : 6 : 5 : 4 : 3 : 2 : 1)$$

(напомним, что в выражениях вида $a : b : c : \dots$ операции деления выполняются последовательно слева направо), то значение выражения станет равным дроби $\frac{10 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{9}$, которая равна числу $10 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 = 44\,800 > 44\,500$.

Примечание: Не очень сложно установить, что получение значения 44 800 — наибольшее, которое можно получить, расставляя скобки. При этом расстановка скобок почти однозначна: все изменения, которые можно допустить, это переставить закрывающую скобку после числа 2 (а не после числа 1) или набор символов $2 : 1$ окружить ещё одной парой скобок. Следующее по величине значение выражения равно 11 200, то есть меньше максимального в 4 раза.

Ответ: Барон не заблуждается.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Приведён верный способ расстановки скобок и верно вычислено полученное значение выражения	7 баллов
Приведён верный способ расстановки скобок, но значение выражения найдено с ошибкой, (возможно, изменившей ответ на неверный)	6 баллов
Заявлено, что что расстановкой скобок можно получить дробь $\frac{10 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{9}$, но это утверждение не доказано, и нужная расстановка скобок отсутствует	3 балла
Примеры (в любом количестве) расположения скобок, дающие другое значение выражения, ИЛИ ответ без обоснования	0 баллов

7.4. Робинзон Крузо каждый второй день пребывания на острове пополняет запасы питьевой воды, каждый третий день — собирает фрукты и каждый пятый день — ходит на охоту. Сегодня, 13 сентября, у Робинзона Крузо тяжёлый день, он должен сделать все эти три дела. Когда у Робинзона Крузо будет следующий тяжёлый день? Ответ обосновать.

Решение: Удобно считать, что в календаре у Робинзона месяц единственный: сентябрь. Тогда у него вместо 1 октября будет 31 сентября, вместо 2 октября — 32 сентября, вместо 1 ноября — 62 сентября и т. д. Запасы питьевой воды пополняются через день, то есть 15-го, 17-го и вообще во все нечётные числа. Фрукты собираются 16-го, 19-го, 22-го и т. д. Несложно убедиться, что это те и только те числа, которые при делении на 3 дают в остатке число 1. Наконец, на охоту Робинзон пойдёт 18-го, 23-го и т. д. Это даты, которые оканчиваются цифрами 3 и 8 (или, что одно и то же, при делении на 5 дают в остатке 3). День будет тяжёлым тогда и только тогда, когда дата будет удовлетворять всем трём условиям. Значит, она должна быть нечётной, а оканчиваться на 3 или на 8. Тогда её последняя цифра — тройка. При делении даты на 3 в остатке должна получиться единица. Это значит, что сумма всех цифр даты тоже даёт 1 при делении на 3. Получаем, что тяжёлыми будут следующие даты сентября (и только они): 13, 43, 73, 103 и далее с шагом в 30 дней. Ближайшая такая дата 43 сентября, что соответствует 13 октября.

Ответ: Следующий тяжёлый день наступит 13 октября.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
При верном рассуждении дата определена неправильно из-за одной арифметической ошибки или из-за незнания количества дней в сентябре	6 баллов
Верно определены все даты, в которые Робинзон делает одновременно какие-то два дела из трёх, например, запасает воду и ходит на охоту	4 балла
Верно и обоснованно найдена дата некоторого другого тяжёлого дня, например, в ответе получено 12 ноября или 12 декабря	3 балла
Верно определены все даты, в которые Робинзон делает какое-то одно дело: запасает воду, собирает фрукты или ходит на охоту	1 балл
Ответ без обоснования ИЛИ решение не полным перебором всех дат с 14 сентября по 13 октября	0 баллов

7.5. Существует ли такое нецелое положительное число, что 15% от него и 33% от него являются целыми числами? Ответ обосновать.

Решение: В качестве такого числа подойдёт любая дробь, знаменатель которой равен 3, а числитель кратен 100. Действительно, если $a = \frac{100m}{3}$, где m — целое, не кратное 3, число, то a — нецелое, а $0,15a = 5m$ и $0,33a = 11m$ — целые числа.

Примечание: Нетрудно доказать, что числами вида $\frac{100m}{3}$ (где m — целое, не кратное 3, число) и исчерпываются все числа, о которых идёт речь в задаче.

Ответ: существует.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Приведено хотя бы одно такое число	7 баллов
Доказано, что знаменатель дроби может равняться только числу 3 (без дальнейшего продвижения)	5 баллов
Имеются верные рассуждения о структуре искомого числа, не приведшие, однако, к решению	не больше 2 баллов
Примеры чисел (в любом количестве), не удовлетворяющих какому-то (каким-то) из условий задачи	0 баллов

7.6. Студент Вася, живущий в 50 км от своего института, ездит на занятия на велосипеде и всегда подбезжает точно к началу занятий. Однако сегодня он

проехал с запланированной скоростью только первые 10 км, а затем велосипед сломался, и Васе пришлось пойти пешком. Через некоторое время Васе повезло, и последние 24 км он ехал на попутной машине. Успел ли Вася к началу занятий, если скорость Васиной ходьбы была в 2,5 раза меньше скорости велосипеда, а скорость машины — в 6 раз больше скорости велосипеда? Ответ обосновать.

Решение: Вася прошёл пешком $50 - 10 - 24 = 16$ км. За время, затраченное на ходьбу, Вася на велосипеде проехал бы в 2,5 раза больше, то есть $16 \cdot 2,5 = 40$ км. Значит, занятия в институте начались как раз тогда, когда Васе удалось сесть на попутную машину. Вывод: Вася на занятия опоздал.

Ответ: Нет, не успел.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
Верный ответ получен в частном случае (например, при конкретной скорости Васиной ходьбы)	2 балла
Неверный ИЛИ необоснованный (хотя и верный) ответ	0 баллов